

3元生成の数値的半群から生じるトーリックイデアルの グレブナー基底

山形大学大学院理工学研究科
菅原明広 (Akihiro SUGAWARA) *

概要

非負整数全体の集合の部分モノイドで、非負整数全体の集合における補集合が有限集合となるものを数値的半群という。García-Marco と Tatakis は、数値的半群が free という性質をもつことを、それから生じるトーリックイデアルのグレブナー基底を用いて特徴づけた。本講演では、3元生成の数値的半群から生じるトーリックイデアルについて、この研究に関連したよいグレブナー基底をもつことがわかったのでこれについて紹介する。

1 導入

$\mathbb{N}$ を非負整数全体、 k を体、 $k[x_1, \dots, x_m]$ を体 k 上の m 変数多項式環とする。

定義 1.1. $S \subset \mathbb{N}$ が次の性質をみたすとき、 S は**数値的半群 (numerical semigroup)** であるという:

- (1) $x, y \Rightarrow x + y \in S$;
- (2) $0 \in S$;
- (3) $\mathbb{N} \setminus S$ は有限集合である。

numerical semigroup S については、一意的な極小生成系をもつことが知られており、その濃度を $e(S)$ と書くことにする。 S を $\{n_1, \dots, n_m\}$ を極小生成系にもつ numerical semigroup とすると、環準同型写像

$$\varphi : k[x_1, \dots, x_m] \rightarrow k[t]; x_i \mapsto t^{n_i} \ (i = 1, \dots, m)$$

を考えることができる。よって、 S から自然にトーリックイデアル $I_S = \ker \varphi$ を得る。トーリックイデアル I_S の任意の生成系の濃度は $e(S) - 1$ 以上であることが知られている。また、numerical semigroup S から生じるトーリックイデアル I_S の二項式からなる極小生成系の濃度 $\mu(I_S)$ が $e(S) - 1$ と一致するとき、 S は **complete intersection** であるという。次に、complete intersection に含まれるクラスを紹介する。

定義 1.2. S を $\{n_1, \dots, n_m\}$ を極小生成系にもつ numerical semigroup とする。 S が配置 $n_1, \dots, n_m$ に対して **free** であるとは、任意の $i \in \{1, \dots, m-1\}$ について、

$$\text{lcm}(n_i, \gcd(n_{i+1}, \dots, n_m)) \in \langle n_{i+1}, \dots, n_m \rangle$$

が成り立つときをいう。ある極小生成系の配置 $n_{i_1}, \dots, n_{i_m}$ ($\{n_{i_1}, \dots, n_{i_m}\} = \{n_1, \dots, n_m\}$) が存在して、 S が $n_{i_1}, \dots, n_{i_m}$ に対して free となるとき、 S は **free** であるという。

*E-mail:s231163m@st.yamagata-u.ac.jp

García-Marco と Tatakis は, numerical semigroup S が free という性質をもつことをグレブナー基底を用いて次のように特徴付けた.

事実 1.3 ([1, Theorem 4.7]). S を numerical semigroup, $\{n_1, \dots, n_m\}$ を S の極小生成系とする. このとき, S が free であることは, I_S が $m - 1$ の元からなるグレブナー基底をもつことと同値である.

この結果は, numerical semigroup S が complete intersection (つまり $\mu(I_S) = e(S) - 1$) であるとき, ある単項式順序 $<$ が存在して $\mu(I_S) = \mu(\text{in}_{<}(I_S))$ が成り立つことと, S が free であることが同値であることを示している. この結果と関係して, García-Marco と Tatakis は次の問題を提起した.

問題 1.4 ([1, Open problem 5.3]). ある単項式順序 $<$ が存在して,

$$\mu(I_S) = \mu(\text{in}_{<}(I_S))$$

が成り立つ numerical semigroup S を特徴付けよ.

今回筆者は $e(S) = 3$ においてこの問題を調べた. その結果, 次の主張を得た.

主定理 1.5. $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ を $e(S) = 3$ の numerical semigroup とする. S が free ではないならば, 単項式順序 $<$ が存在して,

$$\mu(I_S) = \mu(\text{in}_{<}(I_S))$$

が成り立つ.

既に知られている問題の性質をみたま numerical semigroup としては, free な numerical semigroup [1, Theorem 4.7], 等比数列からなる生成系をもつ numerical semigroup [2] が挙げられる. よって, 主定理 1.5 を示したことによって, 問題の性質をみたま新たな numerical semigroup の具体例を提示したことになる. さらに, 先行研究の結果である事実 1.3 と主定理 1.5 を合わせることで次の主張が得られる.

定理 1.6. S を $e(S) = 3$ をみたま任意の numerical semigroup とする. このとき, ある単項式順序 $<$ が存在して,

$$\mu(I_S) = \mu(\text{in}_{<}(I_S))$$

が成り立つ.

本稿では主定理の証明に用いた Buchberger 判定法及び $e(S) = 3$ の numerical semigroup についての基本事項を確認し, 主定理の証明を述べる.

2 準備

2.1 グレブナー基底

この節では, [4, 5] を参考にして, グレブナー基底の基本事項について述べる. 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ の単項式全体の集合 $\mathcal{M}$ における全順序 $<$ が次の性質をみたまするとき, $<$ を $k[x_1, \dots, x_n]$ の単項式順序という:

- (1) $u \in \mathcal{M}, u \neq 1 \Rightarrow 1 < u$;

(2) $u, v, w \in \mathcal{M}, u < v \Rightarrow uw < vw$.

単項式順序としては次のような例があり、主定理では重み順序を用いた。

例 2.1 (純辞書式順序 ($x_{i_1} > \cdots > x_{i_n}$)). 単項式 x^a と x^b について, 「ベクトル $(b_{i_1} - a_{i_1}, \dots, b_{i_n} - a_{i_n})$ の最も左にある 0 でない成分が正」であるとき, $x^a <_{\text{purelex}} x^b$ であると定義する. すると, $<_{\text{purelex}}$ は $k[x_1, \dots, x_n]$ の単項式順序であって, 純辞書式順序 (pure lexicographic order) と呼ばれる.

例 2.2 (重み順序). $<$ を $k[x_1, \dots, x_n]$ の単項式順序, $w \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ を重みベクトルとする. 単項式 x^a と x^b について, 「 $\langle w, a \rangle < \langle w, b \rangle$ 」であるか, または「 $\langle w, a \rangle = \langle w, b \rangle$ かつ $x^a < x^b$ 」であるとき, $x^a <_w x^b$ であると定義する. すると, $<_w$ は $k[x_1, \dots, x_n]$ の単項式順序であって, **重み順序** と呼ばれる. ただし, $\langle a, b \rangle$ は a, b の内積であるとする.

$<$ を単項式順序とする. 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ の任意の多項式 $f \neq 0$ について, f に現れる単項式のなかで $<$ に関して最大のものを f の $<$ に関するイニシャル単項式 (initial monomial) と呼び, $\text{in}_<(f)$ と表す. また, 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ の任意のイデアル $I \neq 0$ から得られる単項式イデアル

$$\text{in}_<(I) = \langle \{\text{in}_<(f) : 0 \neq f \in I\} \rangle$$

を I の $<$ に関するイニシャルイデアル (initial ideal) と呼ぶ.

定義 2.3. $<$ を単項式順序とする. $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル $I \neq 0$ について, I に属する 0 ではない多項式の有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ が $<$ に関する I の **グレブナー基底** (Gröbner basis) であるとは, $\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$ が成立するときをいう.

$\mathcal{G}$ が $<$ に関する I のグレブナー基底であるならば $\mathcal{G}$ は I の生成系であることが知られている.

定義 2.4. $<$ を単項式順序, $I \neq 0$ を多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアルとする. I の $<$ に関するグレブナー基底 $\{g_1, \dots, g_s\}$ が **被約グレブナー基底** であるとは, 次の条件をみたすときにいう:

- (1) g_i における $\text{in}_<(g_i)$ の係数は 1 である ($i = 1, \dots, s$);
- (2) $i \neq j$ のとき, g_j に現れる単項式は $\text{in}_<(g_i)$ で割り切れない.

注意 2.5. $<$ を単項式順序, $I \neq 0$ を多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアルとする. さらに, $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ を I の $<$ に関する被約グレブナー基底とする. このとき, $\{\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s)\}$ は $\text{in}_<(I)$ の単項式からなる生成系の中で極小である. 特に,

$$|\mathcal{G}| = \mu(\text{in}_<(I))$$

が成り立つ. ただし, $\mu(\text{in}_<(I))$ は $\text{in}_<(I)$ の単項式からなる一意的な極小生成系の濃度である.

また, 二項式イデアル I の $<$ に関する被約グレブナー基底は二項式からなることが知られている.

注意 2.6. $<$ を単項式順序, I を多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ の二項式イデアルとする. このとき, I の $<$ に関する被約グレブナー基底 $\mathcal{G}$ について, 注意 2.5 より $\mu(I) \leq \mu(\text{in}_<(I))$ が成り立つ.

命題 2.7 (割り算アルゴリズム). 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ における単項式順序 $<$ を固定し, $g_1, \dots, g_s$ を 0 と異なる $k[x_1, \dots, x_n]$ の多項式とする. このとき, 任意の多項式 $0 \neq f \in k[x_1, \dots, x_n]$ について次の表示 (f の $g_1, \dots, g_s$ に関する標準表示と呼ぶ) が存在する:

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_s g_s + f', \quad f_1, \dots, f_s, f' \in k[x_1, \dots, x_n].$$

ただし,

(1) $f' \neq 0$ のとき, f' に現れる単項式は $\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s)$ のいずれでも割り切れない. 言い換えると, f' に現れる任意の単項式は $k[x_1, \dots, x_n]$ の単項式イデアル $\langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s) \rangle$ に属さない. (f' を f の $\text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_s)$ に関する割り算の余りと呼ぶ.)

(2) $f_i g_i \neq 0$ ならば $\text{in}_<(f_i g_i)$ は $<$ に関して $\text{in}_<(f)$ を超えない, つまり

$$\text{in}_<(f_i g_i) \leq \text{in}_<(f)$$

である.

多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ に属する 0 ではない多項式 f と g について, $\text{in}_<(f)$ と $\text{in}_<(g)$ の最小公倍単項式を $m(f, g)$, f における $\text{in}_<(f)$ の係数を c_f , g における $\text{in}_<(g)$ の係数を c_g と書くことにする. このとき, f と g の S 多項式 $S(f, g)$ を

$$S(f, g) = \frac{m(f, g)}{c_f \text{in}_<(f)} f - \frac{m(f, g)}{c_g \text{in}_<(g)} g$$

と定義する. 一般に, 割り算アルゴリズムにおいて, $f' = 0$ となる標準表示が存在するとき, f は $g_1, \dots, g_s$ に関して **0 に簡約可能**であるということにする.

次に紹介する Buchberger 判定法を用いることで, イデアルの生成系がグレブナー基底になるか判定することができる.

命題 2.8 (Buchberger 判定法). 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル $I \neq 0$ の生成系 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ を固定する. このとき, $\mathcal{G}$ が I のグレブナー基底となるためには次の条件が満たされることが必要十分条件である:

(*) 任意の $i \neq j$ について $S(g_i, g_j)$ は $g_1, \dots, g_s$ に関して 0 に簡約可能である.

次の補題を適用できる場合では, Buchberger 判定法をより簡単に行うことができる.

補題 2.9. 多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ に属する 0 と異なる多項式 f と g について, $\text{in}_<(f)$ と $\text{in}_<(g)$ が互いに素であるならば, $S(f, g)$ は f, g に関して 0 に簡約可能である.

2.2 $e(S) = 3$ の numerical semigroup

この節では, 主定理の証明に必要な $e(S) = 3$ の numerical semigroup についての結果を [3] を参考にして紹介する.

以下, S を $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ を極小生成系にもつ numerical semigroup とする. 主定理の証明に必要な結果を述べるために次の記号を準備する.

$$\begin{aligned} c_1 &:= \min\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : xn_1 \in \langle n_2, n_3 \rangle\}, \\ c_2 &:= \min\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : xn_2 \in \langle n_1, n_3 \rangle\}, \\ c_3 &:= \min\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : xn_3 \in \langle n_1, n_2 \rangle\}. \end{aligned}$$

このとき, $r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32} \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\begin{aligned} c_1 n_1 &= r_{12} n_2 + r_{13} n_3, \\ c_2 n_2 &= r_{21} n_1 + r_{23} n_3, \\ c_3 n_3 &= r_{31} n_1 + r_{32} n_2 \end{aligned}$$

と表せる. さらに,

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^{c_1} - x_2^{r_{12}} x_3^{r_{13}}, \\ f_2 &= x_2^{c_2} - x_1^{r_{21}} x_3^{r_{23}}, \\ f_3 &= x_3^{c_3} - x_1^{r_{31}} x_2^{r_{32}} \end{aligned}$$

とおく. このとき, 次の結果が知られている.

事実 2.10 (Herzog [3, Theorem 3.10]). 次の条件は同値である:

- (1) S は complete intersection である;
- (2) S は free である.

事実 2.11 (Herzog [3, Theorem 3.8]). $i \neq j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) が存在して $r_{ij} = 0$ ならば, S は complete intersection である.

事実 2.12 (Herzog [3, Proposition 3.2]). 任意の $i \neq j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) について $r_{ij} > 0$ とする. このとき, $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$ について,

$$c_i = r_{ji} + r_{ki}$$

が成り立つ.

事実 2.13 (Herzog [3, Theorem 3.8]). 任意の $i \neq j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) について $r_{ij} > 0$ ならば, $\{f_1, f_2, f_3\}$ は I_S の極小生成系となる. 特に, S は complete intersection ではない.

3 主定理の証明

この節では, $e(S) = 3$ の free でない numerical semigroup が問題 1.4 の性質をみたすことを示す.

主定理 1.5 の証明. S は free ではないので, 事実 2.10 より S は complete intersection ではない. よって, 事実 2.11 より

$$r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32} > 0 \tag{1}$$

である. さらに, 事実 2.12 より

$$\begin{aligned} c_1 &= r_{21} + r_{31}, \\ c_2 &= r_{12} + r_{32}, \\ c_3 &= r_{13} + r_{23} \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ. このとき, $c_3 \leq c_2 \leq c_1$ としても一般性を失わない. ここで,

$$\mathbf{w} := \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. 単項式順序 $<$ を一つ選ぶと, $\mathbf{w}$ をもちいて重み順序 $<_{\mathbf{w}}$ をつくれる. はじめに, $\text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(f_1) = x_1^{c_1}, \text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(f_2) = x_2^{c_2}, \text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(f_3) = x_1^{r_{31}} x_2^{r_{32}}$ を示す. 式 (1), 式 (2) より,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{w} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} &= c_2 c_1 - (c_1 r_{12} + 1 \cdot r_{13}) \\ &= (c_2 - r_{12}) c_1 - r_{13} \\ &= r_{32} c_1 - r_{13} \\ &\geq c_1 - r_{13} \\ &\geq c_3 - r_{13} \\ &> r_{23} \\ &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{w} \cdot \begin{pmatrix} r_{21} \\ 0 \\ r_{23} \end{pmatrix} &= c_1 c_2 - (c_2 r_{21} + 1 \cdot r_{23}) \\ &= (c_1 - r_{21}) c_2 - r_{23} \\ &= r_{31} c_2 - r_{23} \\ &\geq r_{31} c_3 - r_{23} \\ &= r_{31} (r_{13} + r_{23}) - r_{23} \\ &= r_{23} (r_{31} - 1) + r_{31} r_{13} \\ &> 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{w} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} &= (c_2 r_{31} + c_1 r_{32}) - c_3 \\ &\geq (c_3 r_{31} + c_3 r_{32}) - c_3 \\ &= (r_{31} + r_{32} - 1) c_3 \\ &> 0 \end{aligned}$$

である. よって, $\text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(f_1) = x_1^{c_1}, \text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(f_2) = x_2^{c_2}, \text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(f_3) = x_1^{r_{31}} x_2^{r_{32}}$ が成り立つ. 次に, $\{f_1, f_2, f_3\}$ は I_S の $<_{\mathbf{w}}$ に関するグレブナー基底であることを示す. 事実 2.13 より, $I_S = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ であることに注意する. Buchberger 判定法 2.8 を用いて考える. 補題 2.9 より $S(f_1, f_2)$ が f_1, f_2, f_3 に関して 0 に簡約可能であることは明らか. $S(f_1, f_3), S(f_2, f_3)$ が f_1, f_2, f_3 に関して 0 に簡約可能であることは,

$$\begin{aligned} S(f_1, f_3) &= -x_3^{r_{13}} f_2, \\ S(f_2, f_3) &= -x_3^{r_{23}} f_1 \end{aligned}$$

よりわかる. よって, $\{f_1, f_2, f_3\}$ は I_S の $<_{\mathbf{w}}$ に関するグレブナー基底となる. さらに, 式 (1), 式 (2) より $\{f_1, f_2, -f_3\}$ は I_S の $<_{\mathbf{w}}$ に関する被約グレブナー基底となる. よって, 注意 2.5, 注意 2.6, 事実 2.13 より,

$$3 = \mu(I_S) \leq \mu(\text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(I_S)) = 3$$

となるので, $\mu(I_S) = \mu(\text{in}_{<_{\mathbf{w}}}(I_S)) = 3$ が成り立つ. ■

参考文献

- [1] Ignacio García-Marco and Christos Tatakis. On robustness and related properties on toric ideals. *Journal of Algebraic Combinatorics*, Vol. 57, No. 1, pp. 21–52, 2023.
- [2] Philippe Gimenez, Indranath Sengupta, and Hema Srinivasan. Minimal graded free resolutions for monomial curves defined by arithmetic sequences. *Journal of Algebra*, Vol. 388, pp. 294–310, 2013.
- [3] Jürgen Herzog. Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta Mathematica*, Vol. 3, pp. 175–193, 1970.
- [4] JST CREST 日比チーム. グレブナー道場. 2011.
- [5] 日比孝之. グレブナー基底. 2003.